



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນາຖາວອນ



ກະຊວງສຶກສາທິການ

ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນ ນັກຮຽນເກັ່ງ ມ7

ທົ່ວປະເທດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2010-2011

ວິຊາ ຄະນິດສາດ

ໃຊ້ເວລາ: 120 ນາທີ

1. (1 ຄະແນນ) ຈົ່ງຊອກຂອບເຂດຂອງ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} + \sqrt{n^2 + 1} - 2n)$

2. (1 ຄະແນນ) ຈົ່ງຊອກຜົນບວກຂອງອັນດັບລຸ່ມນີ້:

$$S = \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \dots$$

3. (1 ຄະແນນ) ໃຫ້ $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ ທີ່ຕອບສະໜອງເງື່ອນໄຂ $x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = x^4 + y^4 = \dots$

ຈົ່ງຄິດໄລ່ $P = x^{2010} + y^{2011}$

4. (2 ຄະແນນ) ໃຫ້ຕຳລາ $f(x) = x^3 - 2ax^2 + (2 + a^2)x + 2$

ຈົ່ງກຳນົດຄ່າຂອງ a ເພື່ອໃຫ້ເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ ທີ່ປະກອບຈາກ ແກນນອນ x , ເສັ້ນຕິດ ແລະ ເສັ້ນຊື່ທີ່ຕັ້ງສາກກັບເສັ້ນຕິດ ຢູ່ທີ່ເມັດຕິດ $A(a, f(a))$ ມີຄ່າເທົ່າກັບ 10 (ຫົວໜ່ວຍເນື້ອທີ່).

5. (3 ຄະແນນ) ໃຫ້ຮູບທີ່ສາມລ່ຽມສະເໝີ ABC.DEF ເຊິ່ງລ່ຽມພື້ນ ມີລວງຍາວ $\sqrt{7}$, ທີ່ມີລວງສູງ 3. ກຳນົດເມັດ G ຢູ່ລ່ຽມຂ້າງ BE ເພື່ອໃຫ້ $BG = \frac{1}{3}BE$. ກຳນົດເມັດ H ຢູ່ລ່ຽມຂ້າງ CF ເພື່ອໃຫ້ $CH = \frac{1}{2}CF$.

ກ. ຈົ່ງຊອກຫາ ບໍລິມາດຂອງຮູບທີ່.

ຂ. ຈົ່ງຄິດໄລ່ ເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ AGH.

ຄ. ຈົ່ງຄິດໄລ່ \cos ຂອງມູມ $\angle GAD$.

6. (2 ຄະແນນ) ໃຫ້ຮູບໜ່ວຍກົມໜຶ່ງ ແນບໃນຮູບຈວຍ. ມີຮູບທີ່ກົມແນບນອກຮູບໜ່ວຍກົມນັ້ນ ແລະມີພື້ນລຸ່ມ ນອນຢູ່ແຜ່ນພຽງດຽວກັບພື້ນຂອງຮູບຈວຍ. ໃຫ້ V_1, V_2 ແມ່ນບໍລິມາດຂອງຮູບຈວຍ ແລະ ຮູບທີ່ກົມຕາມລຳດັບ.

ກ. ຈົ່ງພິສູດວ່າ $V_1 \neq V_2$.

ຂ. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່ານ້ອຍສຸດຂອງອັດຕາສ່ວນ $\frac{V_1}{V_2}$.

ຄະນະກຳມະການອອກຫົວບົດ



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນາຖາວອນ

\$\$\$\$



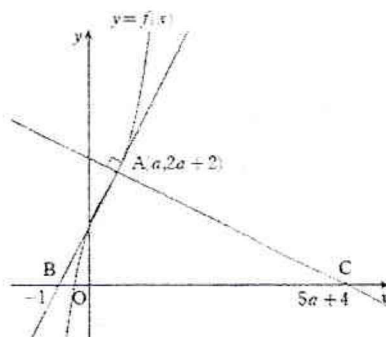
ກະຊວງສຶກສາທິການ

ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຂະໜານຕອບຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງ ຂັ້ນ ມ7 ທົ່ວປະເທດ ສົກຮຽນ 2010-2011

ວິຊາ: ຄະນິດສາດ, ໃຊ້ເວລາ: 120 ນາທີ

ລ.ດ.	ຄຳຕອບ	ຄະແນນ
	<p>ເຮົາໄດ້ $(\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+1} - 2n) = (\sqrt{n^2+n-1} - n) + (\sqrt{n^2+1} - n)$</p> $(\sqrt{n^2+n-1} - n) = \frac{(\sqrt{n^2+n-1} - n)(\sqrt{n^2+n-1} + n)}{(\sqrt{n^2+n-1} + n)}$ $= \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n-1} + n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$	0,5
1 1ຄະແນນ	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n) = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0+1}} = \frac{1}{2}$ $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{(\sqrt{n^2+1} + n)} = \frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1} + n}$ $= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n) = \frac{0}{\sqrt{1+0+1}} = 0$ <p>ດັ່ງນັ້ນ: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2+1} - 2n) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$</p>	0,5

<p>2 1 ຄະແນນ</p>	<p>ໃຈຊ່ອງກຜົນບວກຂອງອັນດັບ: $S = \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \dots$</p> <p>ສັງເກດ: $3, 5, 7, \dots$ ມີພົດຮ່ວມແມ່ນ $2n+1$ $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ ມີພົດຮ່ວມແມ່ນ n $2^2, 3^2, 4^2, \dots$ ມີພົດຮ່ວມແມ່ນ $(n+1)^2$</p> <p>ເຮົາໄດ້ພົດຮ່ວມຂອງພົດທີ່ n ຂອງອັນດັບຜົນບວກແມ່ນ: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$</p>	<p>0,5</p>
<p>2 1 ຄະແນນ</p>	<p>ດັ່ງນັ້ນ: $S_n = \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$</p> $= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ $= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ $= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$	<p>0,5</p>
<p>3 1 ຄະແນນ</p>	<p>ຈາກສົມຜົນເຮົາມີ:</p> $x^4 + y^4 = (x^3 + y^3)(x + y) - xy(x^2 + y^2)$ $\Rightarrow 1 = (x + y) - xy$ $\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$	<p>0,50</p>
<p>3 1 ຄະແນນ</p>	<p>ດັ່ງນັ້ນ: $P = x^{2010} + y^{2011} = 2$</p>	<p>0,50</p>
<p>(4) 2 ຄະແນນ</p>	<p>$f(x) = x^3 - 2ax^2 + (2+a^2)x + 2$</p> <p>ຈາກສົມຜົນຂ້າງເທິງ, ເຮົາໄດ້</p> $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 2 + a^2$ $f(a) = a^3 - 2a^3 + (2+a^2)a + 2 = 2a + 2$ $f'(a) = 3a^2 - 4a^2 + 2 + a^2 = 2$ 	
<p>2 ຄະແນນ</p>	<p>ດັ່ງນັ້ນ, ສາມາດຂຽນສົມຜົນຂອງເສັ້ນຕິດຢູ່ທີ່ເມັດ $A(a, f(a))$ ດັ່ງນີ້:</p> $y - (2a + 2) = 2(x - a)$ $\therefore y = 2x + 2$	<p>0,50</p>
<p>1 ຄະແນນ</p>	<p>ເສັ້ນຕິດຕັດແກນນອນ ຢູ່ເມັດ B ທີ່ $(-1, 0)$</p>	<p>0,25</p>

ສົມຜົນຂອງເສັ້ນຕັ້ງສາກກັບເສັ້ນຕິດແມ່ນ:

$$y - (2a + 2) = -\frac{1}{2}(x - a)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}x + 2$$

0,50

ເສັ້ນຕັ້ງສາກກັບເສັ້ນຕິດ ຕັດແຜນນອນ ຢູ່ເມັດ C ທີ່ (5a+4, 0)

0,25

ຈາກຈຸດນີ້, ເຮົາໄດ້:

$$\overline{BA} = (a+1, 2a+2)$$

$$\overline{BC} = (5a+5, 0)$$

ດັ່ງນັ້ນ, ເນື້ອທີ່ S ຂອງຮູບສາມແຈ ABC ແມ່ນ

$$S = \frac{1}{2} |(a+1) \times 0 - (2a+2)(5a+5)| = \frac{1}{2} |10(a+1)^2| = 5(a+1)^2$$

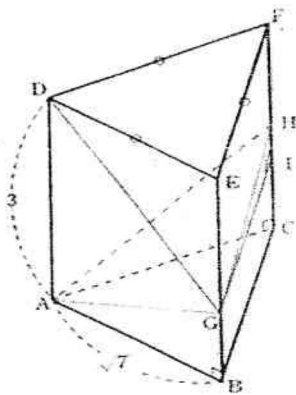
0,50

ຈາກເງື່ອນໄຂທີ່ໃຫ້ມາ

$$5(a+1)^2 = 10 \quad (a+1)^2 = 2 \quad a+1 = \pm\sqrt{2}$$

ສະນັ້ນ, ຄ່າຂອງ a ເພື່ອໃຫ້ຮູບສາມແຈ ມີເນື້ອທີ່ເທົ່າ 10 ແມ່ນ

$$a = -1 \pm \sqrt{2}$$



ສົມມຸດ

ຮູບທໍ່ສາມລ່ຽມ ABC.DEF

$$AB = \sqrt{7}; AD = 3;$$

$$BG = \frac{1}{3} BE; CH = \frac{1}{2} CF$$

ສະຫຼຸບ

ກ. V=? (ບໍລິມາດຂອງຮູບທໍ່)

ຂ. $S_{\triangle ABC} = ?$

ຄ. $\cos(\angle GAD) = ?$

0,25

(5)

ກ. ບໍລິມາດຂອງຮູບທໍ່ V ແມ່ນ

$$V = \triangle ABC \times AD = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{7}^2 \times 3 = \frac{21}{4} \sqrt{3}$$

3ຄະແນນ

0,25

ຂ. ຈາກ $BG = \frac{1}{3} BE = 1$, ຕາມຫລັກເກນປີຕາກໍ ເຮົາໄດ້

$$AG = \sqrt{\sqrt{7}^2 + 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ຈາກເມັດ G ຂີດເສັ້ນຊື່ຕັ້ງສາກກັບ CH ຢູ່ເມັດ I, ໃນສາມແຈ GIH ນຳໃຊ້ຫລັກການປີຕາກໍ ຈະໄດ້:

$$GH = \sqrt{\sqrt{7}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

ຈາກສາມແຈ ACH ຈະໄດ້

$$HA = \sqrt{\sqrt{7}^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

0,50

ໃນຮູບສາມແຈ AGH, ເມື່ອວາງ $\angle GAH = \alpha$ ສາມາດຄິດໄລ່ \sin ແລະ \cos ໄດ້ດັ່ງລຸ່ມນີ້

$$\cos \alpha = \frac{AG^2 + AH^2 - GH^2}{2AG \cdot AH} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{37}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{74}}$$

ເນື່ອງຈາກ $\sin \alpha > 0$ ສະນັ້ນ,

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{\sqrt{74}}\right)^2} = \frac{7}{\sqrt{74}}$$

ສຸດທ້າຍ, ເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ AGH ແມ່ນ

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{37}}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{74}} = \frac{7}{2}$$

1,5

ຄ. ສໍາລັບສາມແຈ AGD ເຮົາໄດ້

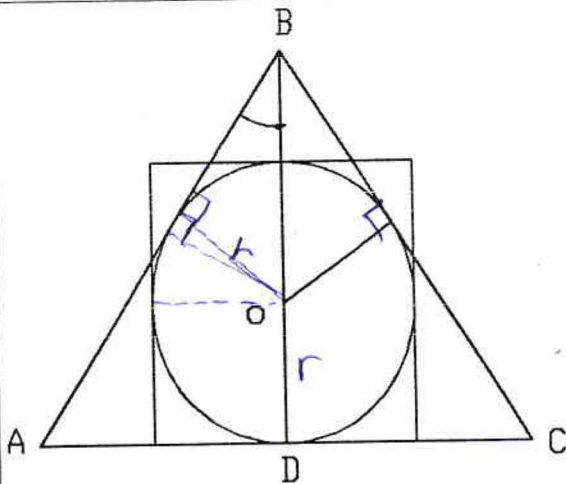
$$DG = \sqrt{\sqrt{7}^2 + 2} = \sqrt{11}$$

ສະນັ້ນ,

$$\cos \angle GAD = \frac{AD^2 + AG^2 - DG^2}{2AD \cdot AG} = \frac{3^2 + (2\sqrt{2})^2 - \sqrt{11}^2}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

0,5

(6)
2ຄະແນນ



ສົມມຸດ

V_1 : ບໍລິມາດຂອງຮູບຈວຍ

V_2 : ບໍລິມາດຂອງຮູບທໍ່

ສະຫຼຸບ

ກ. ພິສູດ $V_1 \neq V_2$

ຂ. ຊອກຄ່ານ້ອຍສຸດຂອງ $\frac{V_1}{V_2}$

0,25

ໃຫ້ $BD = h$, ລັດສະໝີພື້ນຂອງຮູບຈວຍ $DC = a$, ມູມ ABD ແມ່ນ α ; ລັດສະໝີຂອງໜ່ວຍມົນແມ່ນ r

0,25

ກ. ເຮົາມີ: $V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}$ (1),

$$h = OB + OD = \frac{r}{\sin \alpha} + r = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}, a = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$$

0,25

	ແທນເຂົ້າ (1) ເຮົາໄດ້: $V_1 = \frac{\pi.r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{\pi.r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$	
	ບໍລິມາດຂອງຮູບທໍ່ກົມແມ່ນ $V_2 = 2\pi r^3$ ສະນັ້ນ	0,25
	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$, ເຮົາວາງ $s = \sin\alpha$. $0 < s < 1$	0,25
	ສົມມຸດໃຫ້ $\frac{V_1}{V_2} = 1$ (ໝາຍວ່າ $V_1 = V_2$) ເຮົາໄດ້ສົມຜົນ $7s^2 - 4s + 1 = 0$ ສົມຜົນນີ້ຖ້າແກ້ຕາມ s ສົມຜົນນີ້ບໍ່ມີໃຈຜົນ; ເງື່ອນໄຂນີ້ s ບໍ່ສາມາດກຳນົດໄດ້. ສະນັ້ນສາມາດສະຫຼຸບໄດ້ວ່າ $V_1 \neq V_2$.	0,25
	ຂ. ວາງ $\frac{V_1}{V_2} = k$, ເຮົາໄດ້ສົມຜົນ $(1+6k)s^2 + 2(1-3k)s + 1 = 0$ ເພື່ອໃຫ້ສົມຜົນນີ້ມີໃຈຜົນ, ເຮົາຕ້ອງມີ. $\Delta' = (1-3k)^2 - (1+6k) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{4}{3}$ ດັ່ງນັ້ນຄ່ານ້ອຍສຸດຂອງ $\frac{V_1}{V_2} = k$ ແມ່ນ $\frac{4}{3}$, ຕອບສະໜອງກັບ $s = \sin\alpha = \frac{1}{3}$ ແລະ $OB = 3r$.	0,5